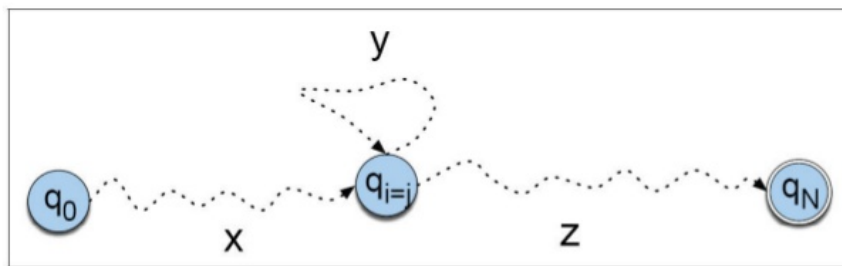


## TD : A la frontière des langages rationnels

Olivier Raynaud (raynaud@isima.fr)

### Pumping Lemma



**Pumping Lemma.** Let  $L$  be an infinite regular language. Then there are strings  $x, y$ , and  $z$ , such that  $y \neq \epsilon$  and  $xy^n z \in L$  for  $n \geq 0$ .

34

**Question 1.** Dire si les langages suivants sont rationnels. Démontrer l'assertion.

1.  $a^*b^*$  ;
2.  $\{a^p \mid p \geq 0\}$  ;
3.  $\{a^pba^q \mid p, q \geq 0\}$  ;
4.  $\{a^pba^p \mid p \geq 0\}$  ;

**Question 2.** Montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels :

1.  $\{0^p 10^p \mid p \geq 1\}$  ;
2.  $\{0^p 1^q 2^p \mid p, q \text{ entier}\}$  ;
3.  $\{0^p 1^q \mid p \leq q\}$  ;
4.  $\{0^p 1^{2^p} \mid p \geq 1\}$  ;
5.  $\{0^p 1^q 2^r \mid p \geq 0, q > r \geq 0\}$  ;
6.  $\{0^p 1^q 2^{2 \cdot (p+q)} \mid p \geq 0, q \geq 0\}$  ;
7.  $\{0^p 1^q \mid p \neq q\}$ .

**Question 3.** Montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels :

1. Chaînes de 0 et de 1 de la forme  $xx$  ;
2. Chaînes de 0 et de 1 de la forme  $xx^R$  ;
3. Chaînes de 0 et de 1 de la forme  $x\bar{x}$  ;
4. Chaînes de 0 et de 1 qui contiennent autant de 0 que de 1 ;
5. Chaînes de 0 et de 1 de la forme  $x1^p$  où  $x$  est de longueur  $p$ .

**Question 4.** Montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels :

1. Le langage des mots sur  $\Sigma = \{a, b\}$  comportant un nombre pair de  $a$  et un nombre impair de  $b$ .
2. Le langage des mots sur  $\Sigma = \{a, b\}$  comportant un nombre de  $a$  et de  $b$  n'ayant pas la même parité.
3. Le langage des mots sur  $\Sigma = \{a, b\}$  n'ayant pas le même nombre de  $a$  et de  $b$ .

**Question 5.** Montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels :

1.  $\{1^p \mid p \text{ est pair}\}$  ;
2.  $\{1^p \mid p \text{ est carre}\}$  ;
3.  $\{1^p \mid p \text{ est cubique}\}$  ;
4.  $\{1^p \mid p \text{ est une puissance de } 2\}$  ;
5.  $\{1^p \mid p \text{ est premier}\}$  ;

**Question 6.** *Montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels :*

1. *Chaînes de 0 et de 1 commençant par 1 dont l'interprétation décimale est un nombre premier ;*
2. *Chaînes de la forme  $0^i1^j$  telles que le plus grand diviseur entre  $i$  et  $j$  soit 1 ;*

**Question 7.** *Les langages suivants sont rationnels. Néanmoins montrer pourquoi la contraposée du lemme de la pompe ne peut être appliquée.*

1. *L'ensemble vide ;*
2.  *$\{00, 11\}$  ;*
3.  *$(00 + 11)^*$  ;*
4.  *$01^*0^*1$  ;*